Matematica si fizica

1. probleme de minim/maxim
2. Fenomene de ordine-dezordine
3. Sisteme complexe: dinamica neliniara

1. Matematica si fizica

1. Drumul minim; probleme de minim/max:

- *1a. Principiul lui Fermat* la reflexie, aplicaţie practica cu hârtie milimetrica, rigla, sfoara, pioneze;
- *1b. lanţisorul:* principiul lui Maupertuis
- *1c. aria minima*, aplicaţie la baloane de săpun (experimente fotografiate) dar si la organisme vii: radiolari,....
- *1d*. *problema postaşului*
- *1e*. *magnetismul*: interacţiunea feromagnetica din aproape in aproape
- *1f. percolatia*: medii neomogene: groapa de gunoi ecologica; curgerea prin medii poroase – problema fântânilor; extracţia petrolului; fluidificarea nisipului si avalanşele de zăpada

O scurta istorie

- In august 1684 , astronomul Edmund Halley a călătorit la Cambridge pentru a discuta cu Newton o problema ştiinţifică la ordinea zilei si anume cea legata de mişcarea planetelor. Se ştia deja ca planetele se mişcă în jurul Soarelui pe traiectorii eliptice (Kepler). Se presupunea de asemenea că Soarele exercită o forţă de atracţie de forma 1/r2. Halley, la întâlnirea cu Newton, l-a întrebat dacă ştie cam ce fel de traiectorie ar avea o planeta sub influenţă unei astfel de forţe, la care Newton a răspuns, o elipsă!. La care Halley l-a întrebat de unde ştie, iar Newton i-a răspuns ”am calculat-o”. Fără nici o urmă de îndoială această este una din cele mai mari realizări ale ştiinţei din toate timpurile.

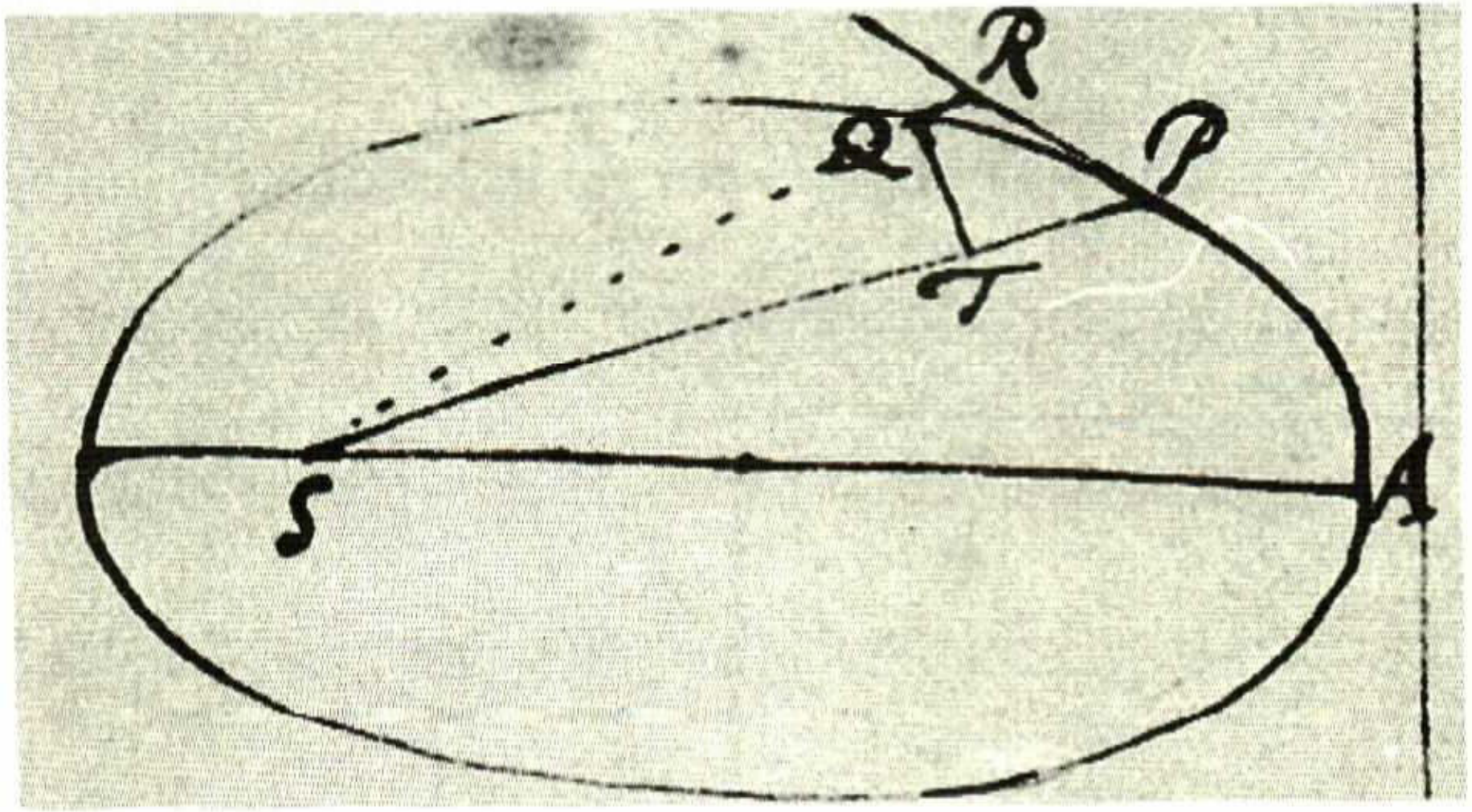
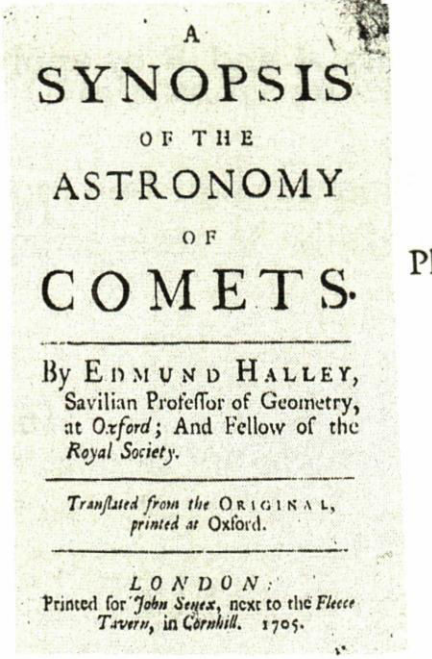


Figura 1 Schiţă lui Newton din lucrarea *De Motu corporum in gyrum* (1684).



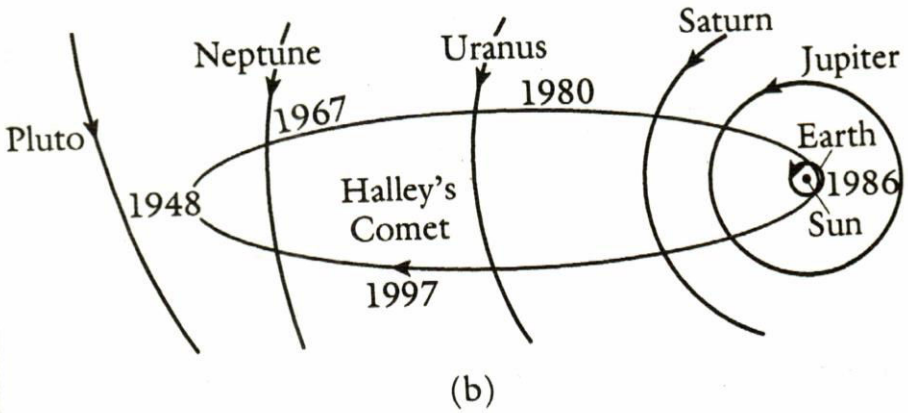
A
SYNOPSIS
OF THE
ASTRONOMY
OF
COMETS.

By EDMUND HALLEY,
Savilian Professor of Geometry,
at Oxford; And Fellow of the
Royal Society.

Translated from the ORIGINAL,
printed at Oxford.

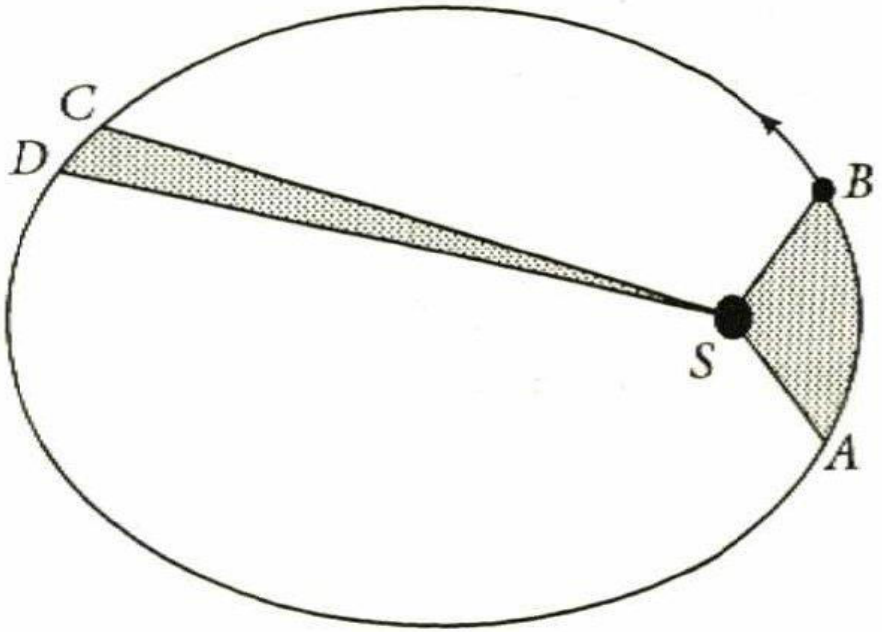
LONDON:
Printed for John Senex, next to the Fleece
Tavern, in Cornhill. 1705.

(a)

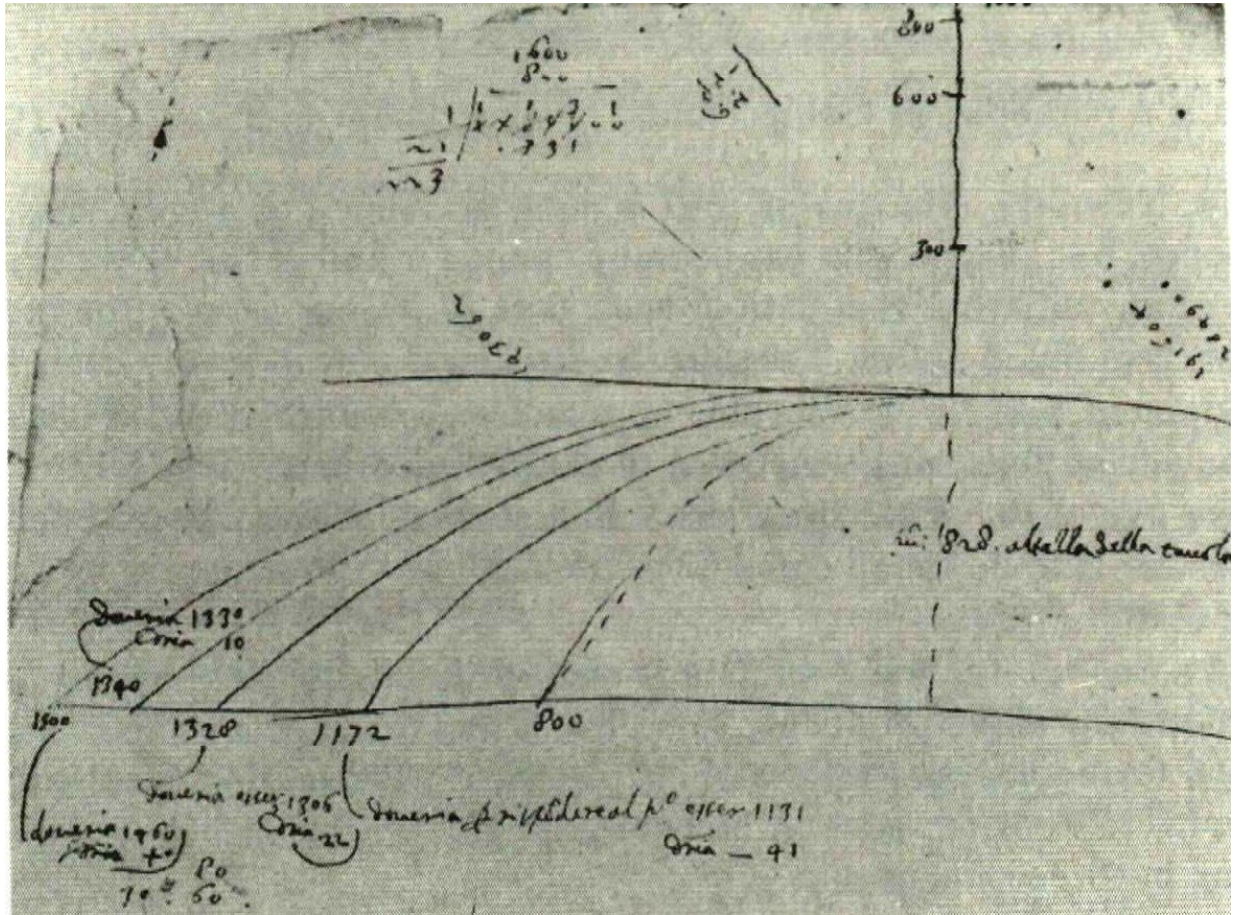


(b)

Având la dispoziţie mecanica newtoniană se pot deduce traiectoriile şi evoluţiile în timp ale obiectelor supuse unor forţe date. Această abordare presupune o idee de *cauză – efect.*

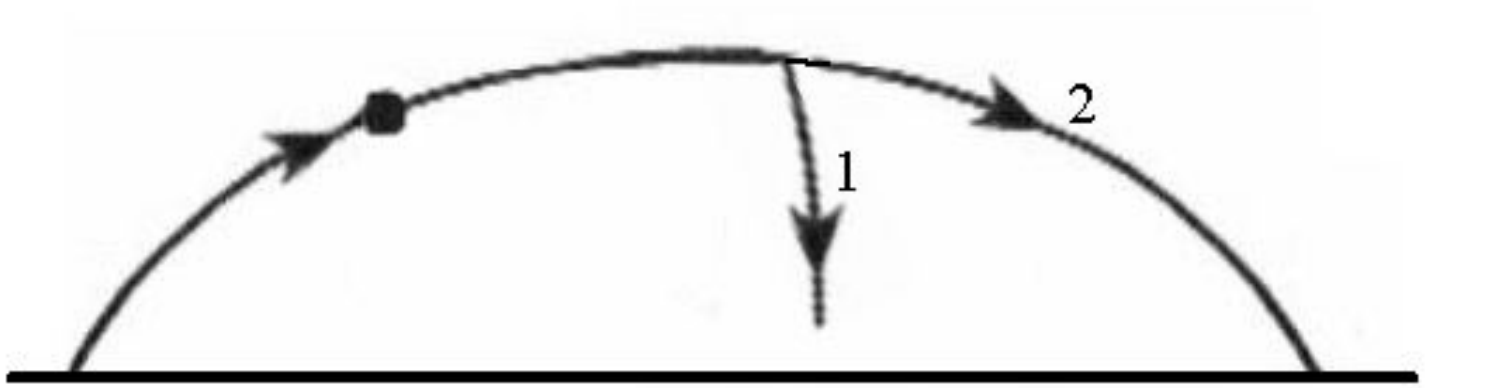


- O altă personalitate care a încercat să descrie traiectoriile corpurilor a fost Galileo Galilei. In lucrarea *De Motu* (1590) el publica forme ale traiectoriilor unor corpuri aruncate orizontal cu diferite viteze. Datele sunt măsurate si fac parte din preocuparea lui de a studia mişcarea de cădere a corpurilor.



- Este prima traiectorie de mişcare calculată. Să ne amintim că pentru antici, cele două traiectorii posibile erau cea rectilinie (Aristotel) şi cea circulară (Platon). Prima rezulta din ideea de mişcare continuă, iar a doua din motive legate de perfecţiunea cercului. Ambele idei erau de natură filosofică, nici una nu rezulta din motive fizice. Din această cauză primul rezultat matematic privind o traiectorie reală este deschiderea unei noi căi, a unei noi metode de gândire.
- Acesta este şi motivul pentru care lucrarea lui Newton se numeşte *„Philosophiae naturalis principia mathematica”.* In prefaţă Newton spune ”Geometria nu ne învaţă cum se descriu aceste linii, ci le postulează” (se referă la traiectorii). Si tot Newton spune că filosofii „sunt preocupaţi de numele lucrurilor şi nu de lucrurile înseşi”.

- Interesant este faptul că aceste desene sunt realiste (făcute cu simţul observaţiei) spre deosebire de cele făcute în timpul lui Aristotel si după el, în care ideea era că un corp aruncate se mişcă atât timp cât are în el „forţă vie” după care el cade brusc la verticală



1 Miscarea perceputa de Aristotel 2 Miscarea reala observata



Newton Galileo Galilei Le Verrier H.Cavendish H. Poincaré Aristotel

- In prezent *Principia* din 1687 reprezintă o opera capitală care este utilizată şi azi ca model. Dacă deschidem *Principia*, vom avea dificultatea de a nu găsi forma pe care azi o avem. Lucrarea este scrisă pe baza raţionamentelor geometrice, asemănătoare cu *Elementele* lui Euclid. Dar şi mai mult, nu vom găsi în ea ceea ce azi utilizăm din plin şi anume ecuaţiile diferenţiale. Dinamica scrisă sub formă modernă a apărut cam peste 60 de ani în diferite lucrări ale lui Leonhard Euler (1707-1783). El a fost cel care a scris pentru prima dată ecuaţiile de mişcare sub forma cunoscută nouă, azi (1749)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

- Ecuaţiile pot fi *ordinare (ODE)*, sau cu *derivate parţiale (PDE)*, exemplificate mai jos:

ecuaţii liniare (ODE)

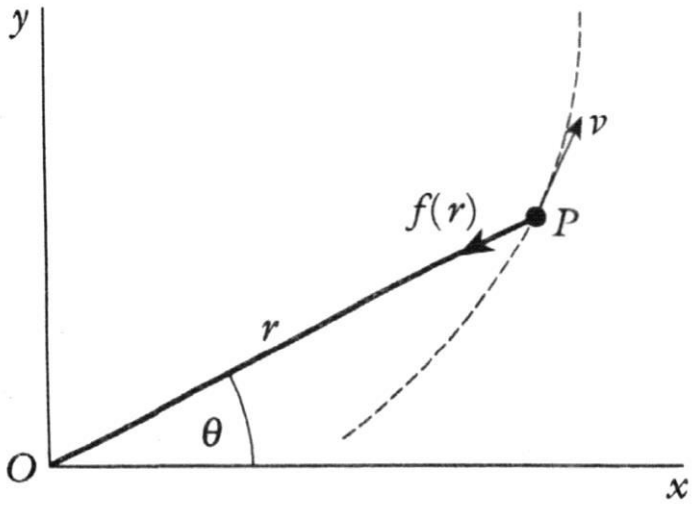
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

ecuaţii neliniare (ODE)

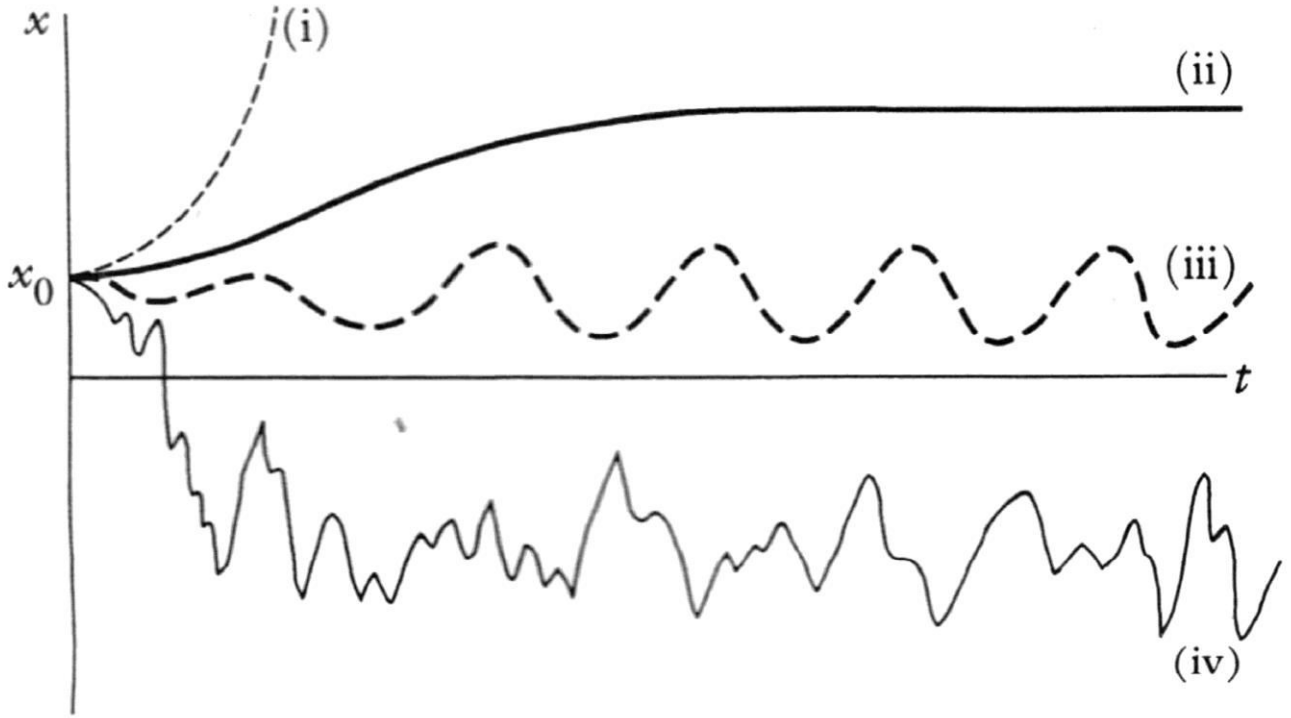
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + x^3 = F_0\cos t$$

ecuaţie cu derivate parţiale (PDE) – ecuaţia undelor

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

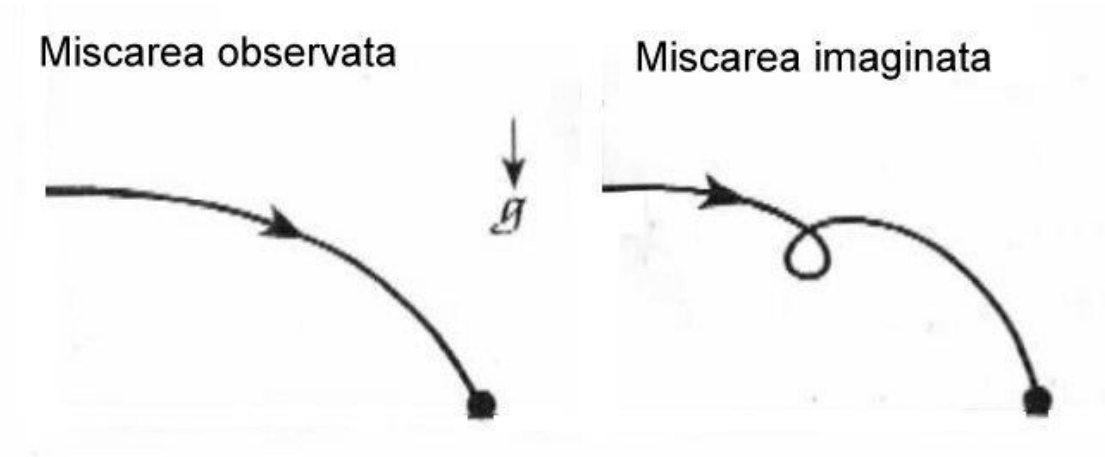


Concluzia metodei dinamicii newtoniene este că:
- orice mişcare se face in spaţiu si timp,
- orice traiectorie este descriptibila printr-o **curba** - funcţie



- Având la dispoziţie mecanica newtoniană se pot deduce traiectoriile şi evoluţiile în timp ale obiectelor supuse unor forţe date. Această abordare presupune ideea de *cauză – efect.*
- Dar putem să ne punem problema într-un cadru mai general, fără a implica principiul de cauză şi efect. Putem să încercăm să gândim mişcarea de la punctul A la punctul B al unui obiect, sau evoluţia unui sistem don starea A în starea B, considerând mişcarea sau evoluţia *ca un întreg.* Există astfel posibilitatea să ne imaginăm mai multe evoluţii posibile (sau traiectorii) care să ducă din starea A în starea B compatibile cu situaţia dată. Nu ştim care este cauza şi nu avem decât efectul, adică traiectoria sau transformarea, evoluţia sistemului. O astfel de tratare este necesară pentru situaţii ne-mecanice care nu pot fi tratate ca rezultat al unor forţe. O astfel de tratare trebuie să apeleze la alte „ingrediente', alte idei sau concepte, care să permită găsirea şi prognoza evoluţiei (traiectoriei).

- Spre exemplu în figura 8 sunt prezentate doua posibile traiectorii la aruncarea pe orizontală a unui mobil, pentru care noi acum ştim că prima este cea observată şi a doua este una ipotetică. Întrebarea este dacă putem găsi şi o altă metodă de a decide care dintre cele două situaţii este cea reală.
- Răspunsul este dat de *calculul variaţional*. Vom vedea că metoda este mai generală şi mai „subtilă” decât cea care apelează la forţe. Ea se pretează de exemplu la unele probleme mai complicate de mecanică, de optică, de mecanica fluidelor, de mecanica cuantică etc.



Câteva idei din **teoria calculului variaţional**

- Analiza (matematică) clasică studiază funcţiile. In calculul variaţional se studiază relaţii în care valoarea variabilei independente este determinată de o funcţie [1]
- Să considerăm lungimea unei curbe arbitrare care uneşte două puncte date A şi B. Variabila dependentă este lungimea curbei şi va fi determinată de forma curbei care uneşte cele două puncte. Dacă ecuaţia curbei (plane) este

$$y = y(x)$$

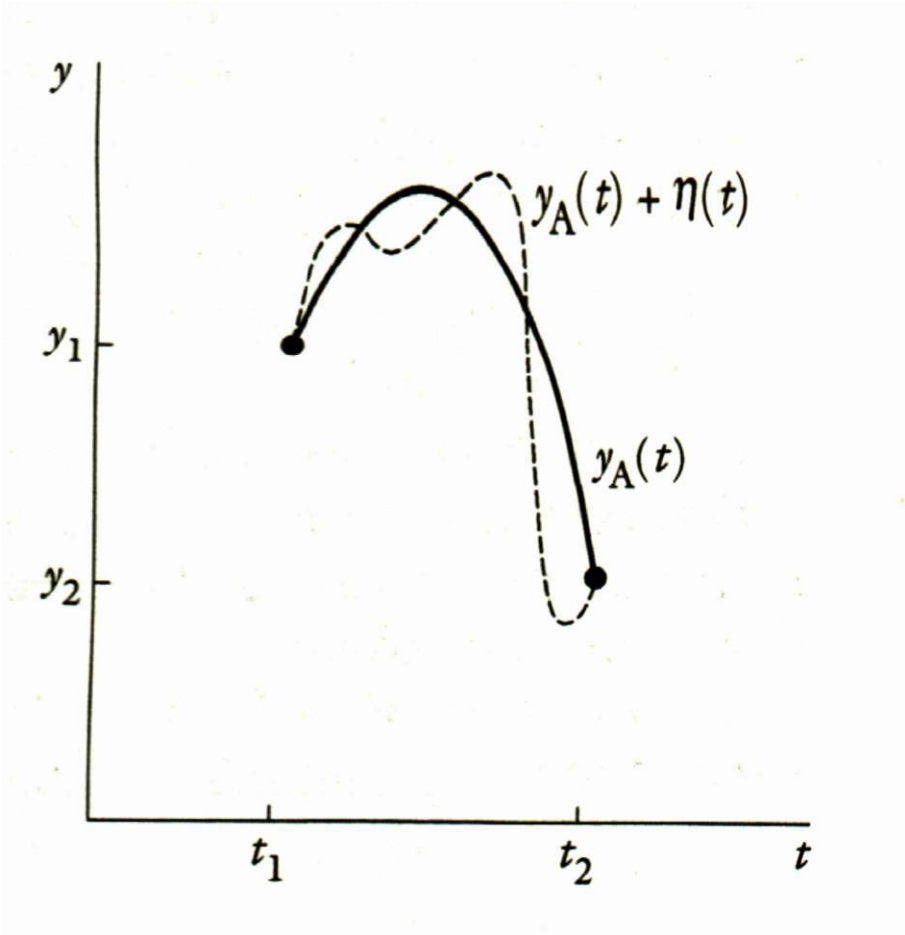
unde funcţia *y(x)* este continua şi admite derivată continuă y'(x) pe intervalul dat.

- [1] M.V.Lavrentiev, L.A.Liusternik, *Curs de calcul variaţional*, Ed. Tehnică, 1955

- Lungimea curbei va fi atunci dată de integrala:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

- Când funcţia *y(x)* variază, se modifică şi lungimea curbei *J.*



Două funcţii (curbe) posibile care unesc cele două puncte A şi B, variabila fiind aici *t* – timpul

***1. Problema lui Johann Bernoulli*:**

Dintre toate curbele care unesc două puncte date A şi B să se găsească aceea pe care un punct material greu, plecat din A fără viteză iniţială şi supus numai acţiunii greutăţii ajunge în cel mai scurt timp în B.

In cădere liberă $v = \sqrt{2gy}$ (Galilei)

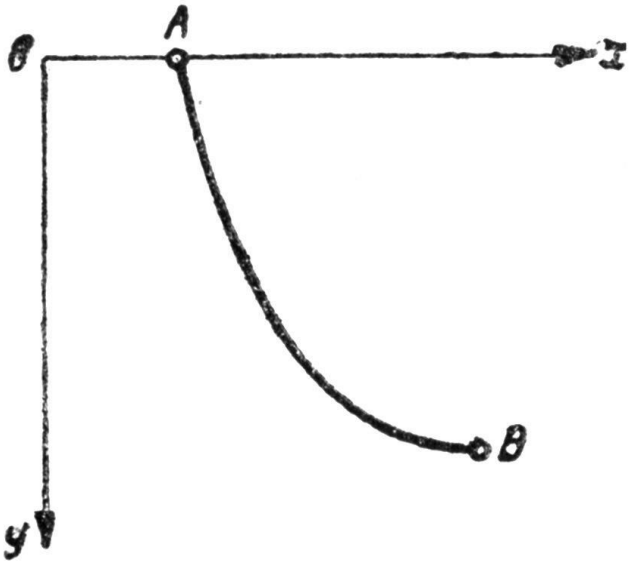


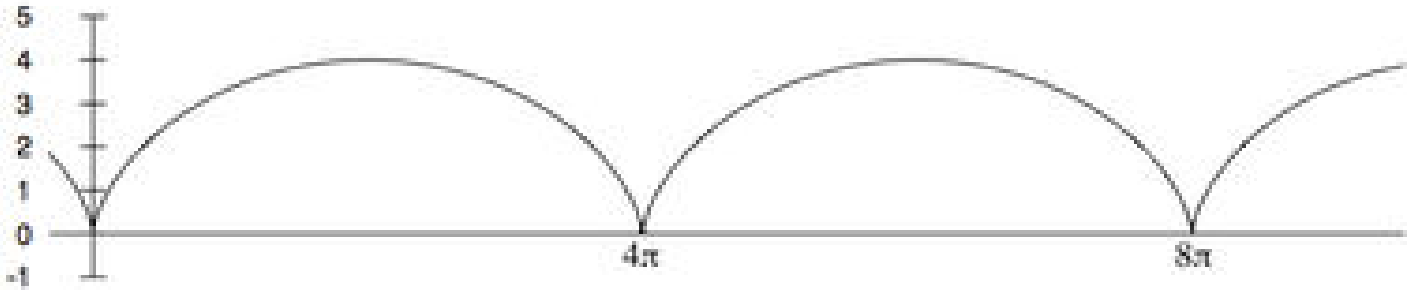
Figura 10 Problema brahistocromei

Pe curba necunoscuta AB, avem:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+y'^2}\,dx}{dt}$$

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\,dx$$

- T este o *funcţională,* căci depinde de forma funcţiei *y(x)*.
- Pentru problema lui Bernoulli, această curbă este denumită *brachistocronă* şi este un fragment de cicloidă inversată.





Lănţisorul

- Este un tip de *sistem articulat* format din bare materiale rectilinii, rigide, legate intre ele prin balamale sferice de dimensiuni foarte mici aşa încât pot fi considerate puncte materiale – noduri (“*poligon funicular*”).
- *Lănţişorul* - fir flexibil şi inextensibil, unidimensional, supus unor forţe exterioare. In câmp gravitaţional el se numeşte lănţişor ca sistem, dar şi ca funcţie analitică.
- *Podul suspendat*: este alcătuit dintr-o linie funiculară construită dintr-un cablu de suspensie, de care este atârnată cu ajutorul unor cabluri de legătură o punte orizontală pe care se află greutăţile care, sub formă de forţe paralele cu câmpul gravitaţional, solicită fiecare element al cablului de suspensie.



- Lănţişorul este o curba plana ce are formula analitică:

$$y - c = a \cdot ch \frac{x - b}{a}$$

unde a, b, şi c sunt constante iar x şi y sunt coordonatele unui punct de pe curbă (în plan vertical). Determinarea celor trei constante se poate face dacă cunoaştem coordonatele a două puncte A (x_1,y_1), B(x_2,y_2) şi lungimea firului *l.*

Dacă facem notaţiile:

$$x_2 - x_1 = h > 0; \qquad y_2 - y_1 = k; \qquad \frac{k}{2k} = z \quad \text{si} \quad \frac{2\sqrt{l^2 - k^2}}{h} = m$$

(Ioan I. Plăcinţeanu, *Mecanică vectorială şi analitică*, Ed. Tehnică, 1958, cap. XXVI)

- Ecuaţia care va permite determinarea lui *a* va fi:

$$e^{z} - e^{-z} = mz$$

- şi cunoscând constanta *a* se poate determina constanta *b* din ecuaţia:

$$l + k = a \cdot e^{-\frac{b}{a}} \left(e^{-\frac{x_2}{a}} - e^{-\frac{x_1}{a}} \right)$$

- Constanta *c* se determina din prima ecuaţie în care se pun perechea de coordonate de exemplu A, x_1 şi y_1 a unui punct de pe fir, adică din:

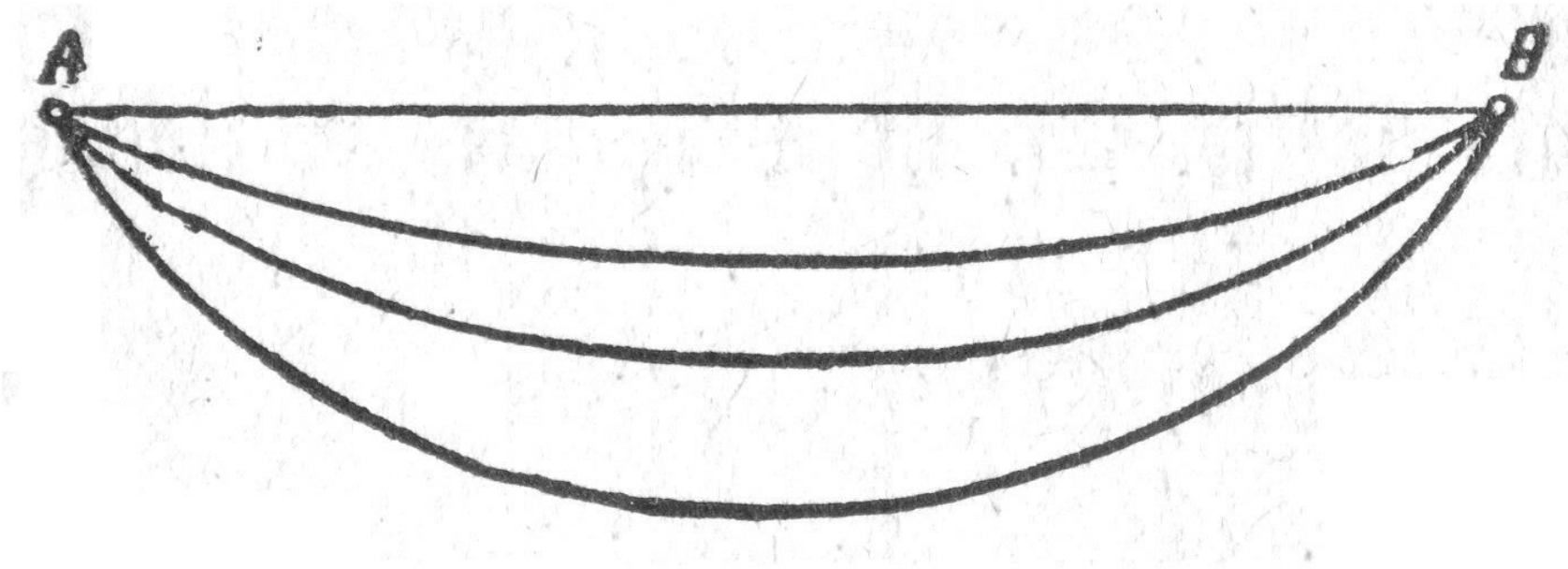
$$y - c = a \cdot ch \frac{x - b}{a}$$

$$x = r(t - \sin t)$$

$$y = r(t - \cos t)$$

Sau în coordonate carteziene:

$$x = \frac{r}{\cos\left(1 - \frac{y}{r}\right)} - \sqrt{y(2r - y)}$$



Cu *t* s-a notat un parametru pe curba

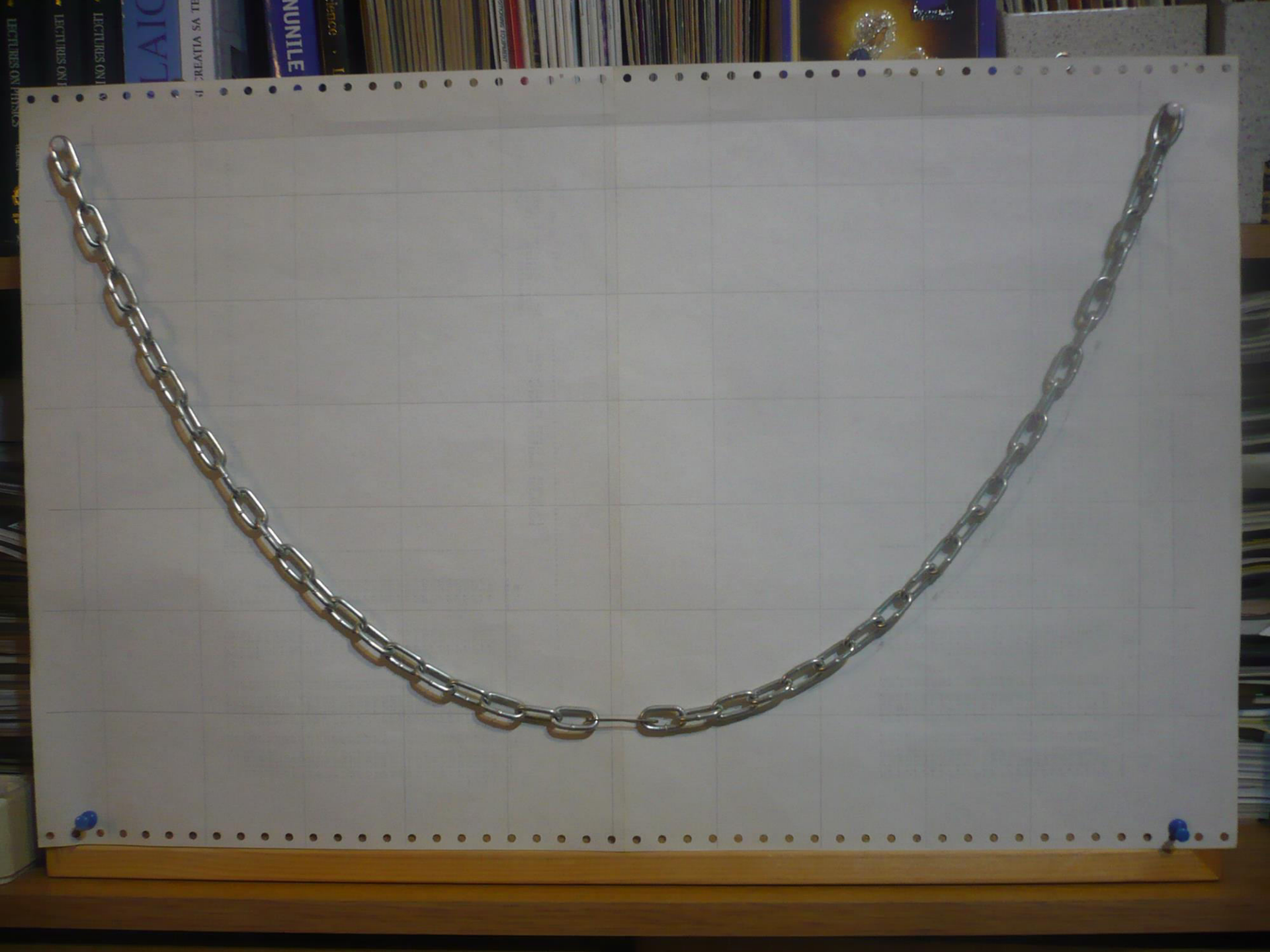
Experiment

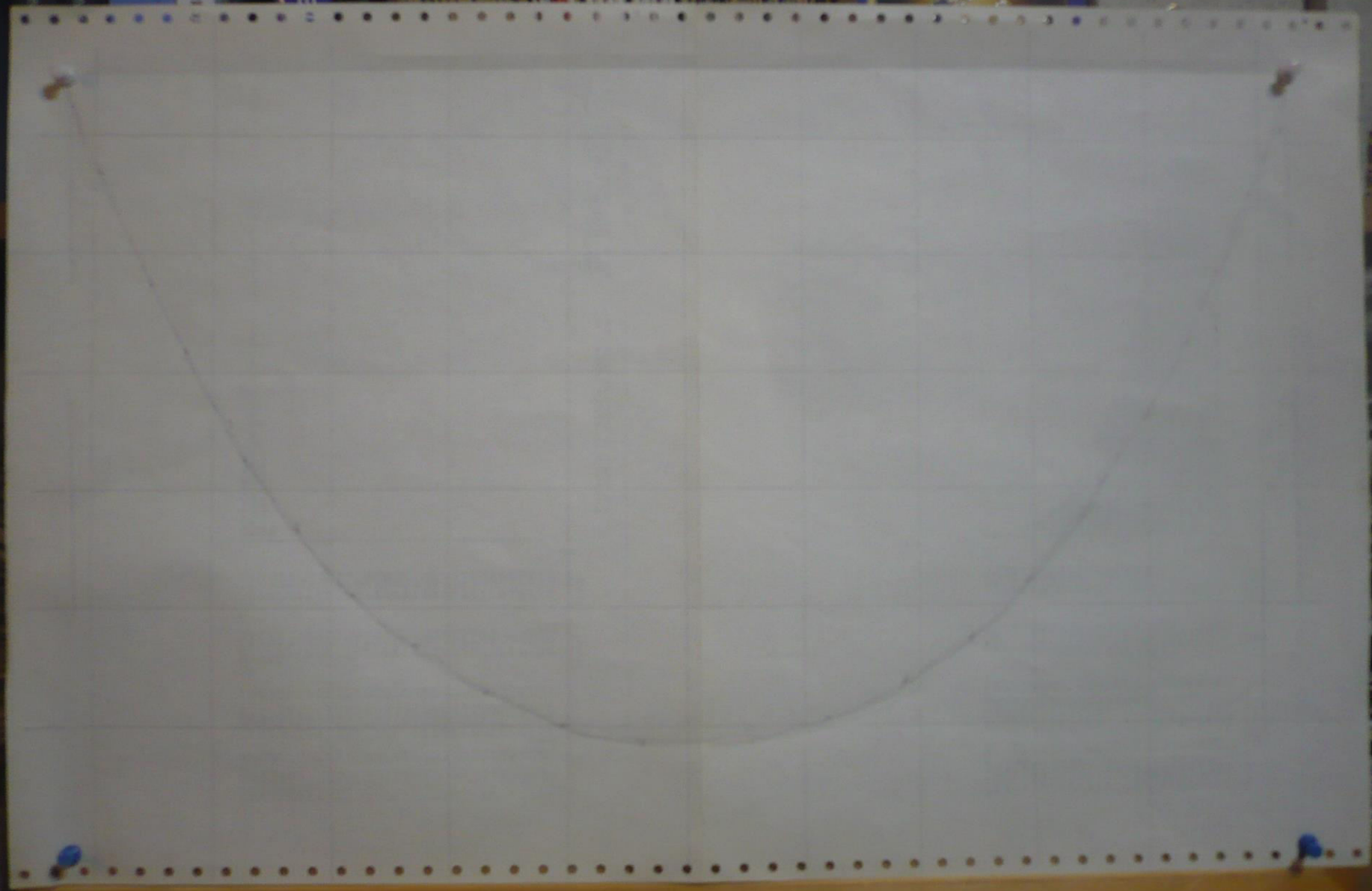
- Se fixează o hârtie milimetrică pe o planşetă şi din două puncte oarecari se atârnă un lanţ greu. Se notează poziţiile x, y ale punctelor lanţului (cel puţin 10 puncte) şi să se verifice forma funcţiei obţinute (cicloida inversată).



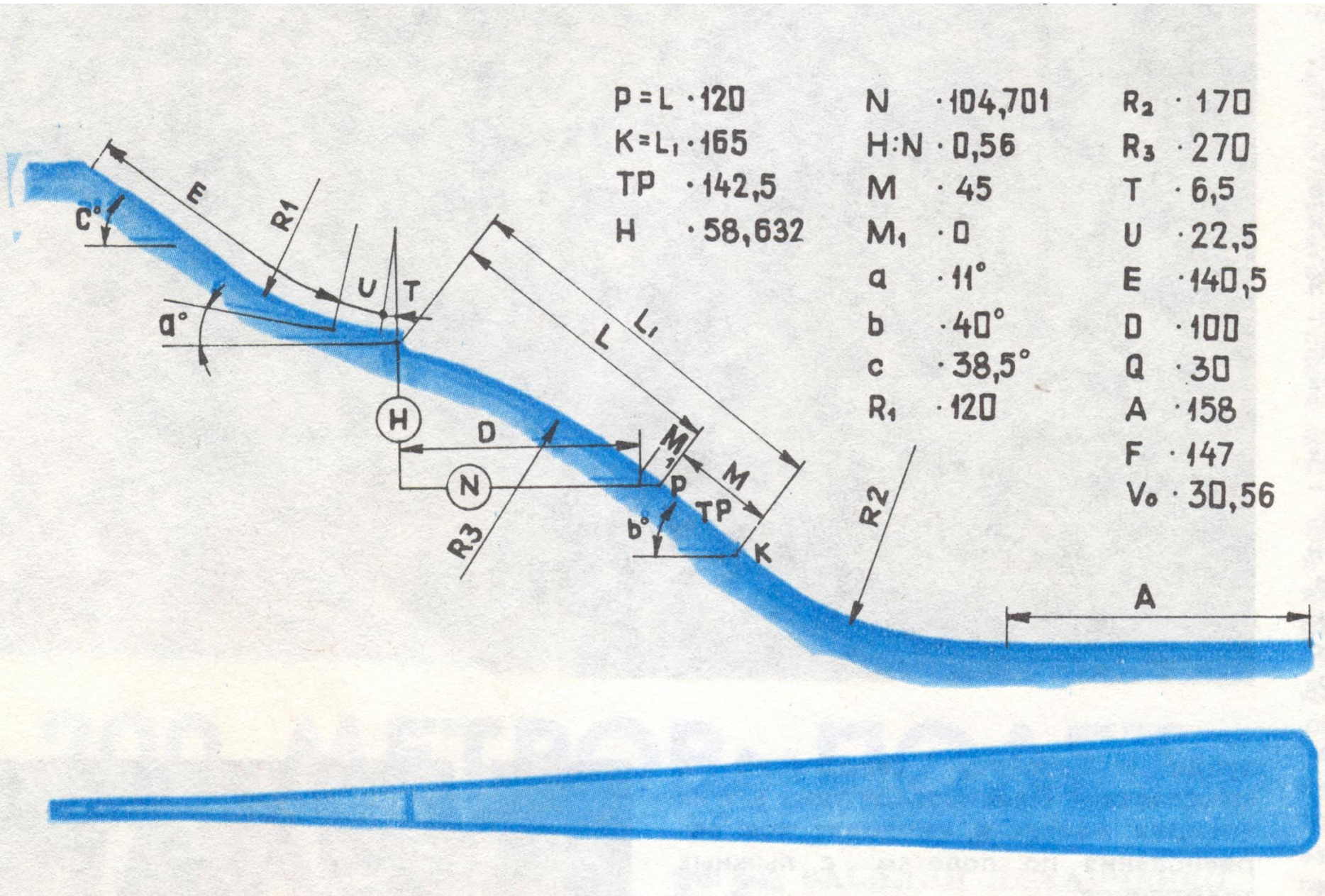


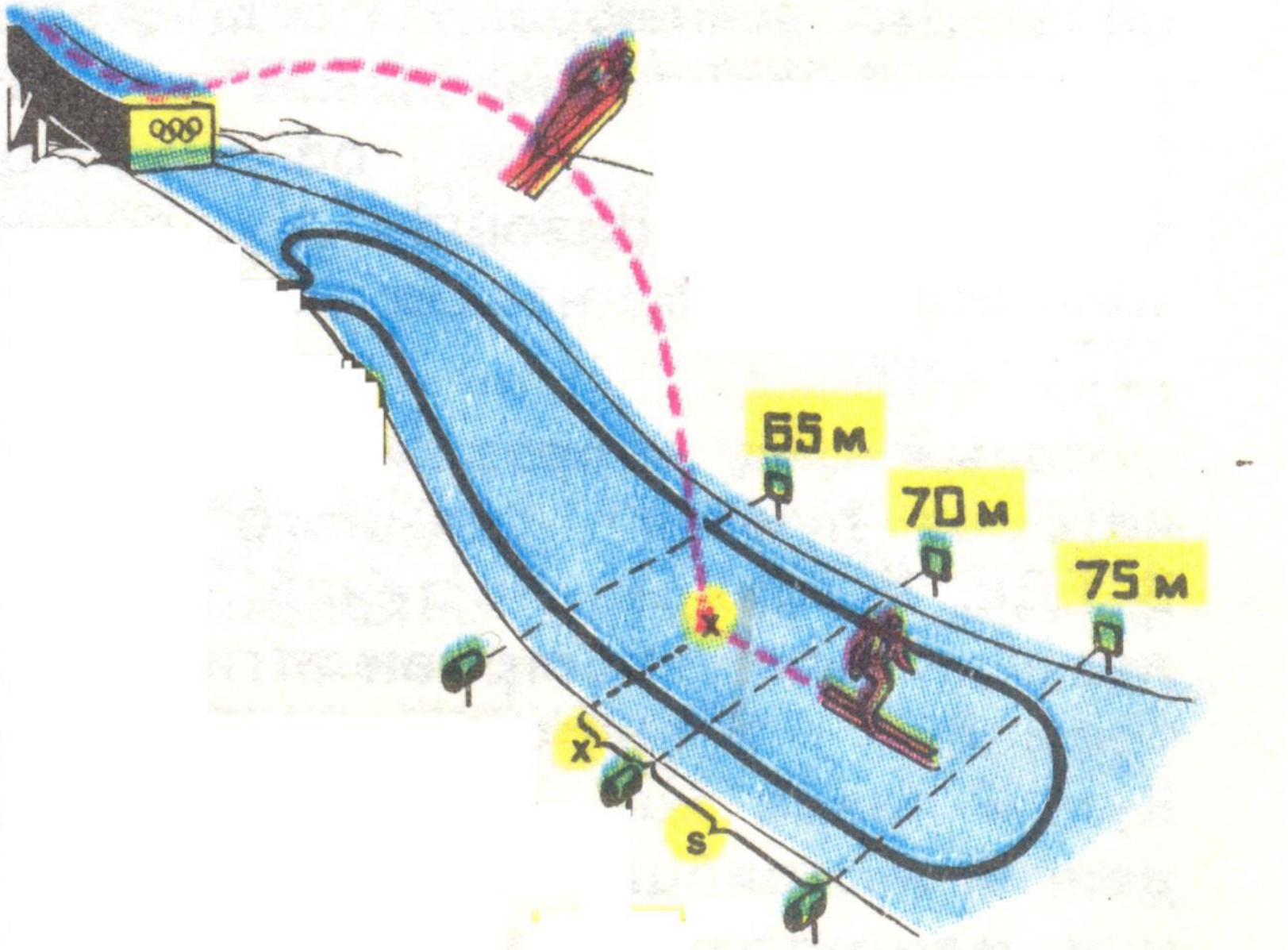






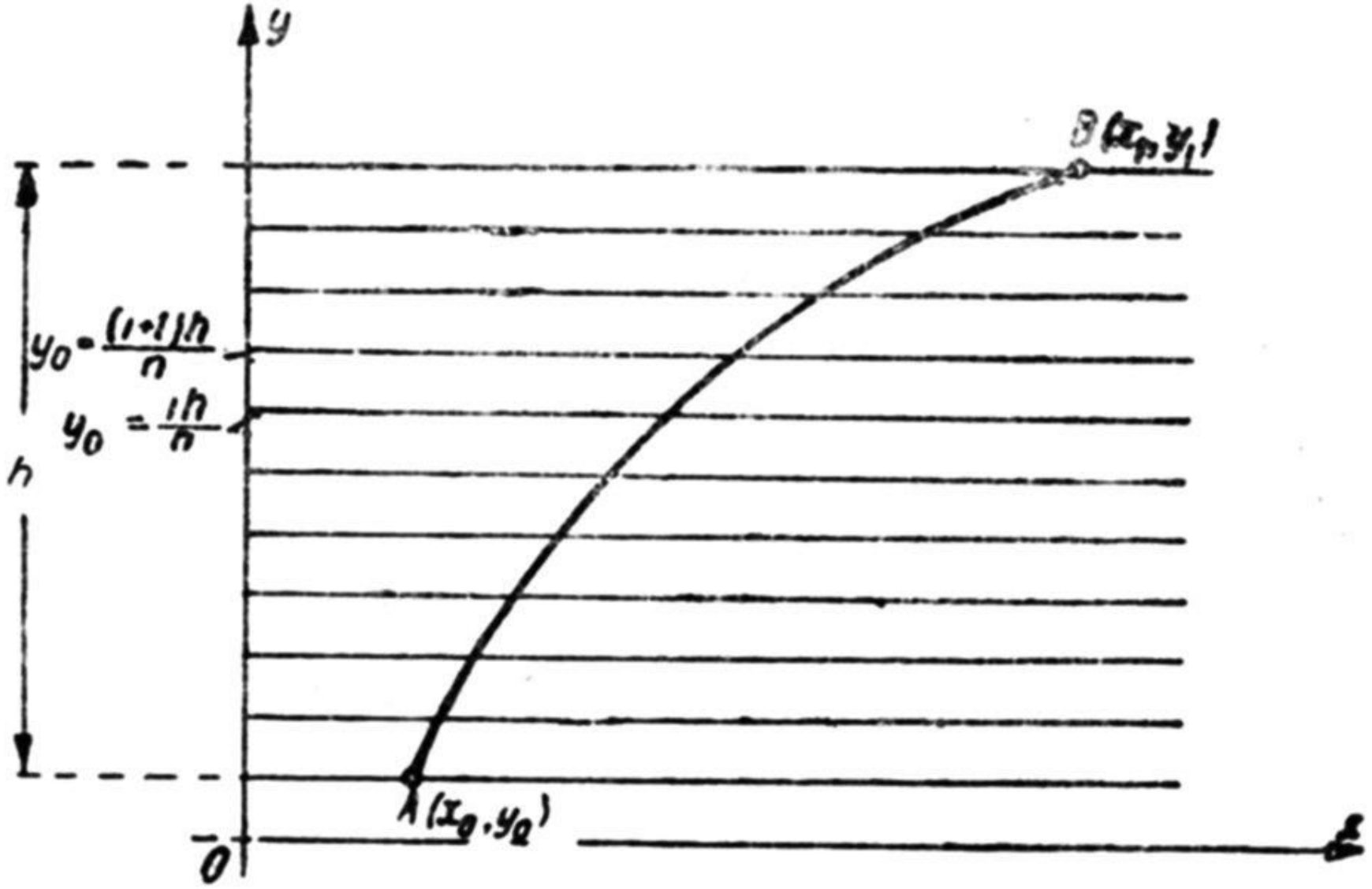
Exemple de alte curbe: trambulina de schi




65 м
70 м
75 м
x
x
s

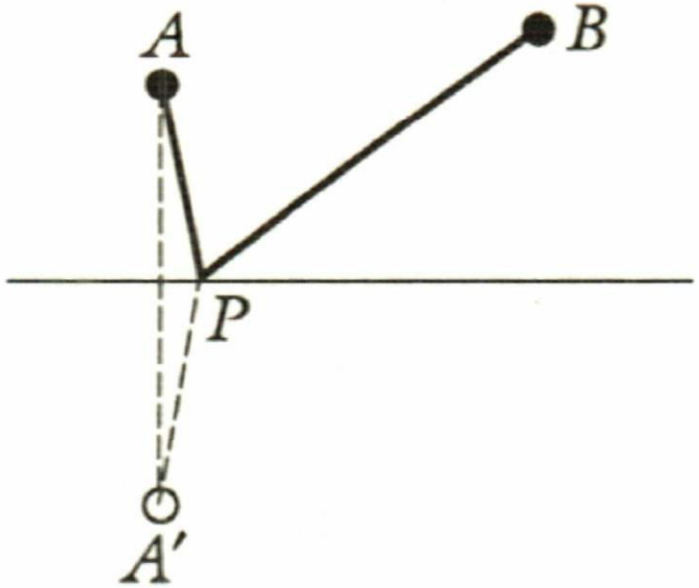
Problema 2: Problema lui Fermat:

- *Intr-un mediu transparent cu indice de refracţie variabil se dau două puncte A şi B. Se cere să se afle traiectoria razei de lumină care porneşte din A şi ajunge în B.* Din punct de vedere fizic ceasta se reduce la găsirea traiectoriei razei de lumină care străbate drumul în timp minim. Echivalentul mecanic al principiului lui Fermat este principiul *Maupertuis – Euler.* Poate fi utilizat pentru construirea şoselelor de viteză maximă şi deci consum minim de combustibil.

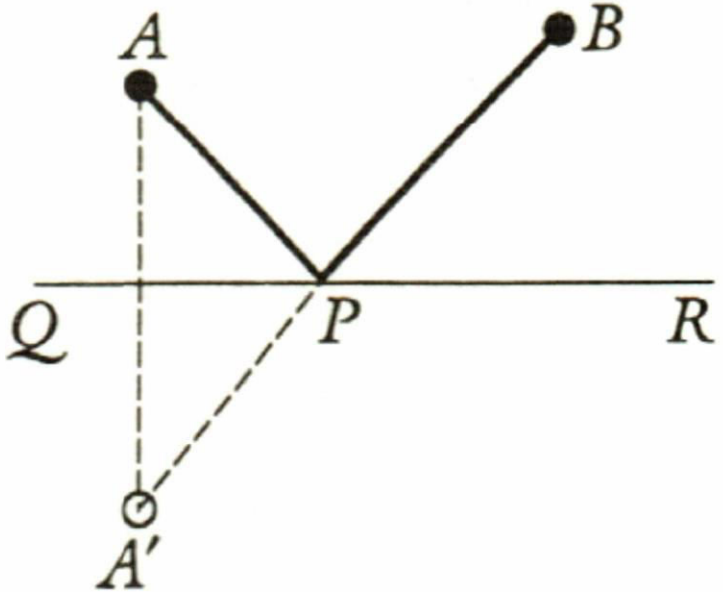


Problema generală a lui Fermat (practic, ea se utilizează în astronomie la determinarea exactă a poziţiei unei stele - corecţia refracţiei atmosferice – *Almanahul astronomic*)

Problema lui Fermat simplificată (doar două medii) este pentru reflexie:

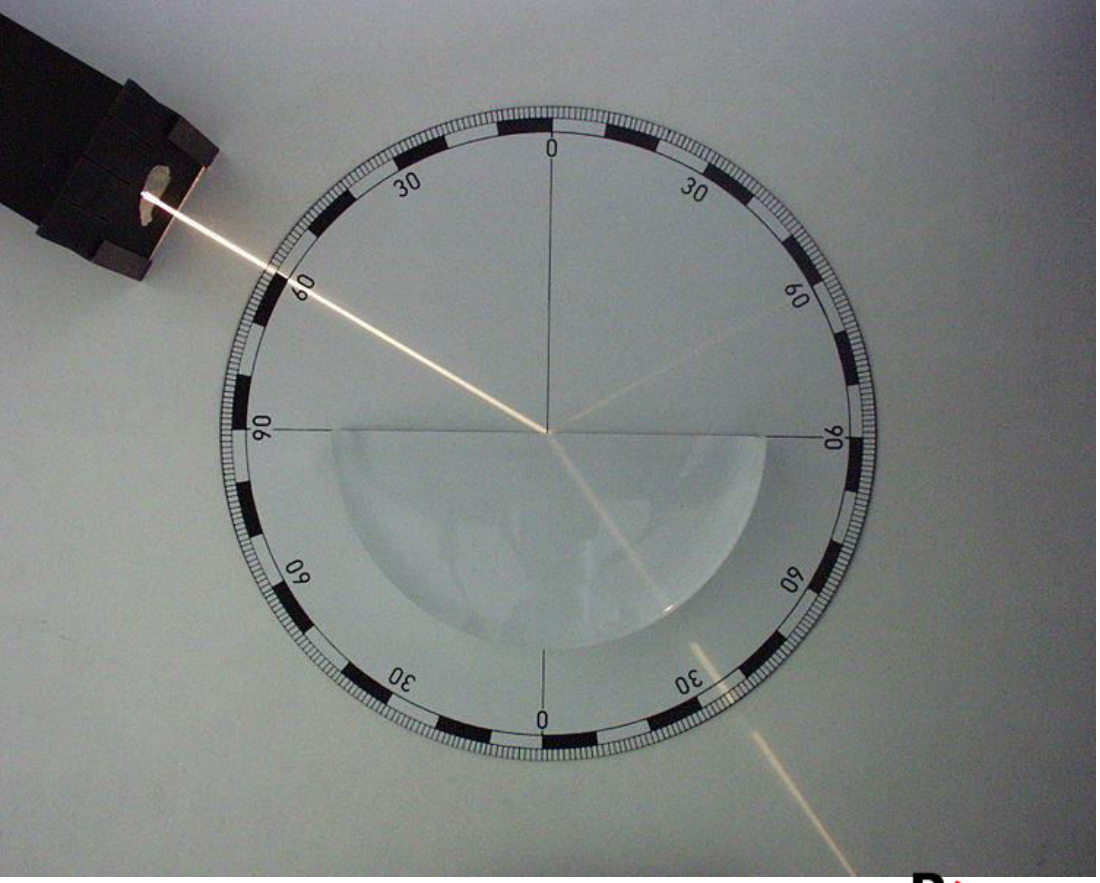


(a)

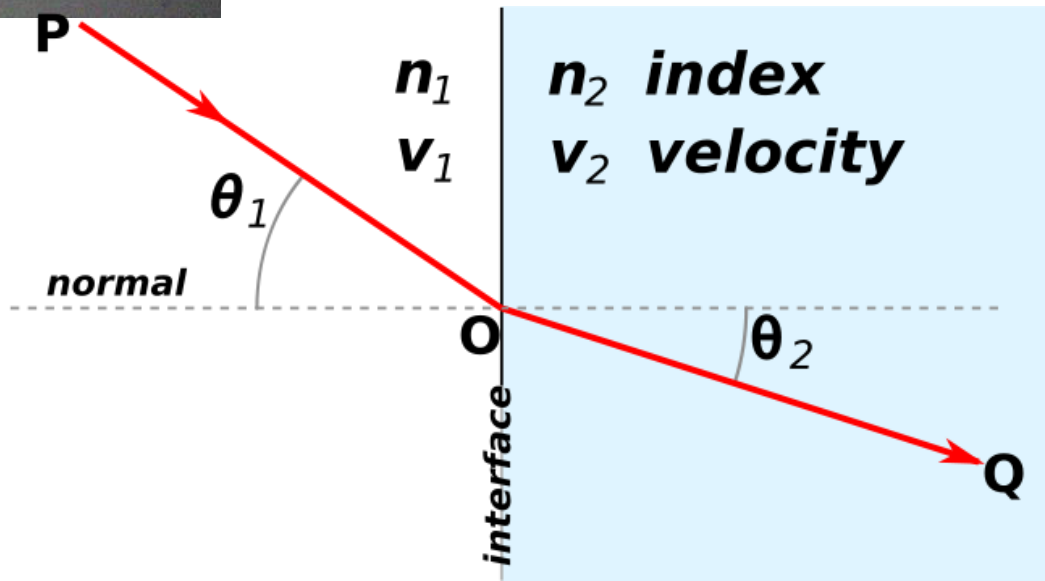


(b)

Iar pentru refracţie este dată de legea lui Snell:



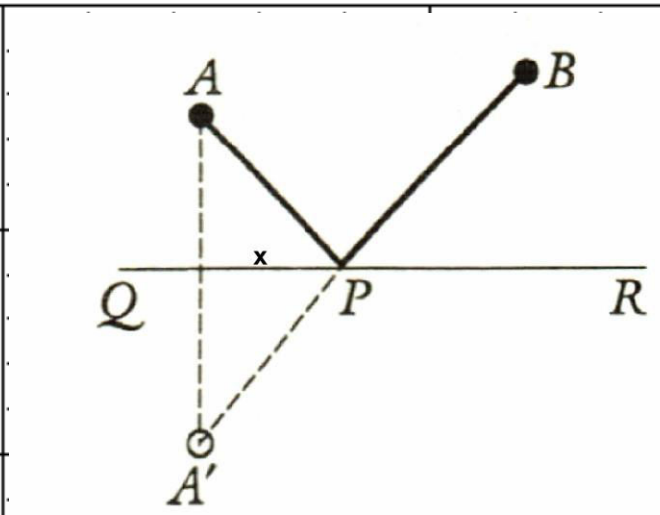
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



Experiment

- Pe o hârtie milimetrică se aleg două punct A şi B oarecare, şi o linie care simbolizează o oglindă. Se pun două pioneze în punctele A şi B iar o aţă leagă de pioneza A. Se duce aţa până la „oglindă” şi apoi se întinde spre B. Se măsoară lungimea aţei între A, oglindă şi B (L = APB) funcţie de poziţia P (x = distanţa QP) a punctului de reflexie. Se reprezintă grafic lungimea funcţie de poziţie şi se verifică egalitatea unghiurilor la reflexie, pentru drumul minim.

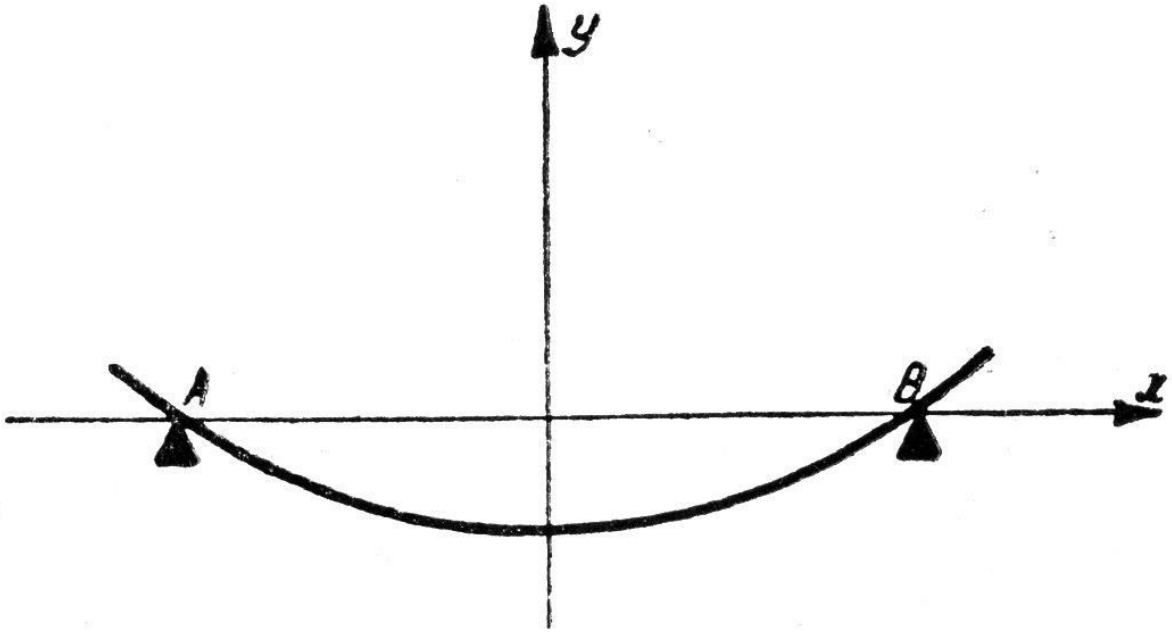
lungimea drumului razei reflectate



27
26
25
24
23
22
L
0
5
10
15
x

- Analogia dintre mecanică şi optică pe baza acestui principiu de minim, a condus pe matematicianul si fizicianul irlandez William Rowan Hamilton (1833) să rescrie ecuaţiile mecanicii, introducând funcţia hamiltoniană $H = T + V$. Care depinde doar de coordonate şi impulsuri
- Probleme echivalente ar fi de exemplu forma unei bare elastice, omogene, grele, sprijinită pe două puncte. Aceasta este tot o problemă de minim, rezolvabilă prin calculul variaţional.

bara grea sprijinită în două puncte



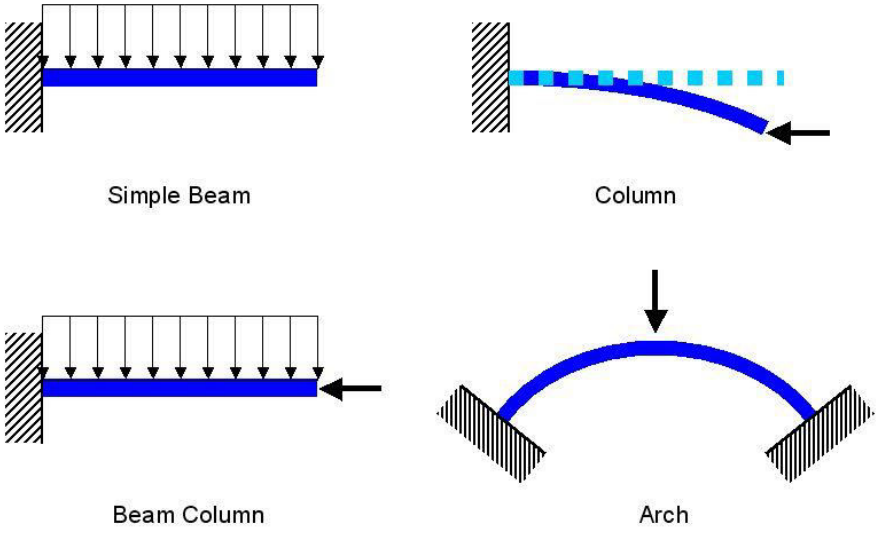
$$y = -\frac{c}{24}x^4 + \frac{c}{4}l^2x^2 - \frac{5}{24}cl^4$$

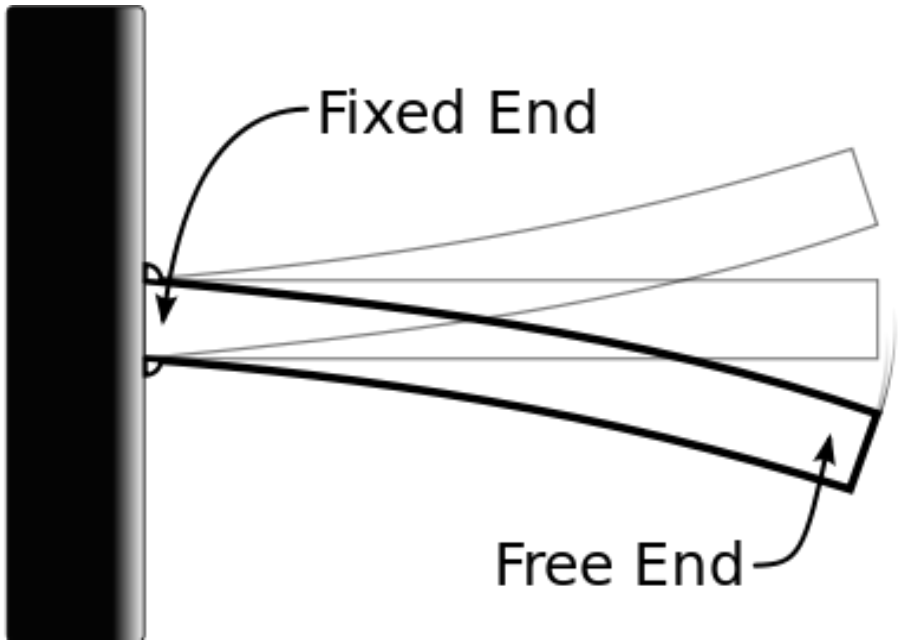
unde c = ρ/m este o constantă, raportul dintre densitate şi modulul de elasticitate al barei.

Dacă bara elastică este încastrată; ecuaţia de încovoiere a ei este:

$$y = \frac{F}{6EI}\left(3Lx^2 - x^3\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{m}}$$

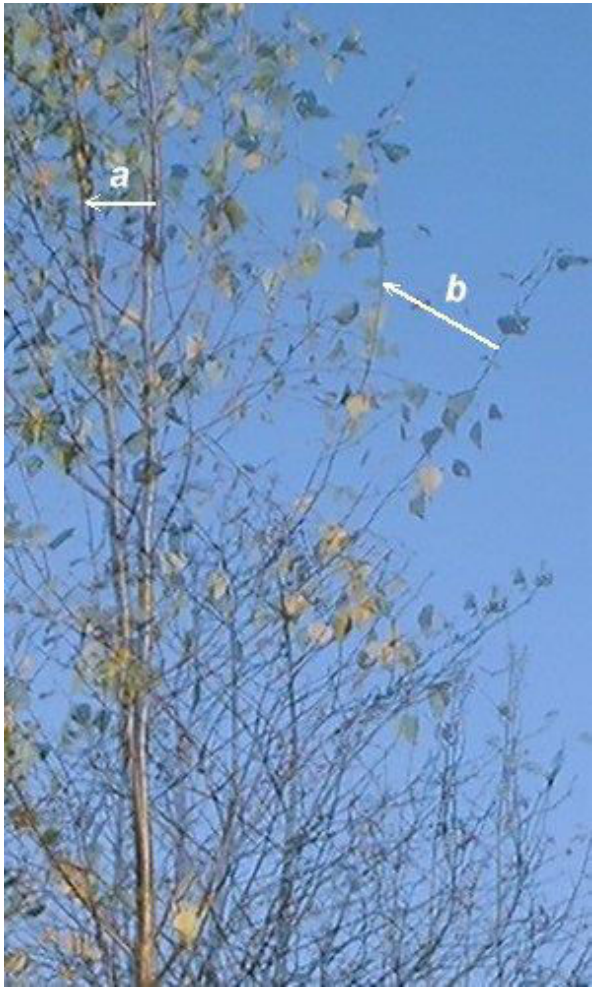




Efectul vântului asupra ramurilor de copac, aplicaţie la „bara încastrată”.

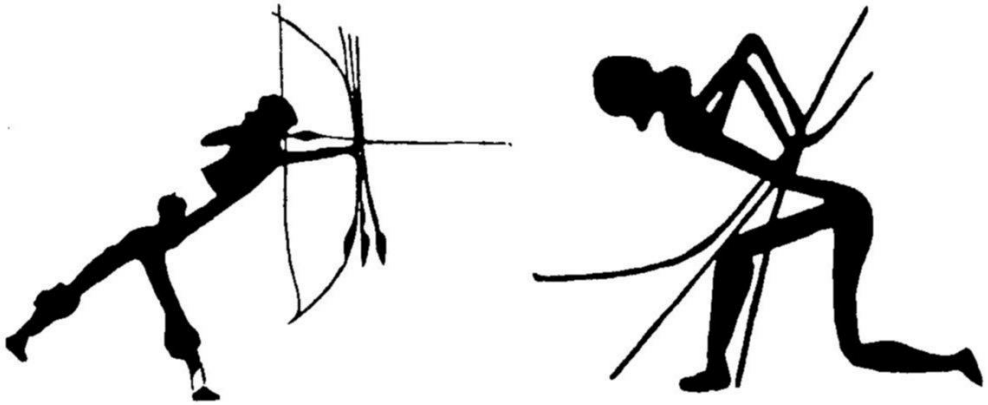


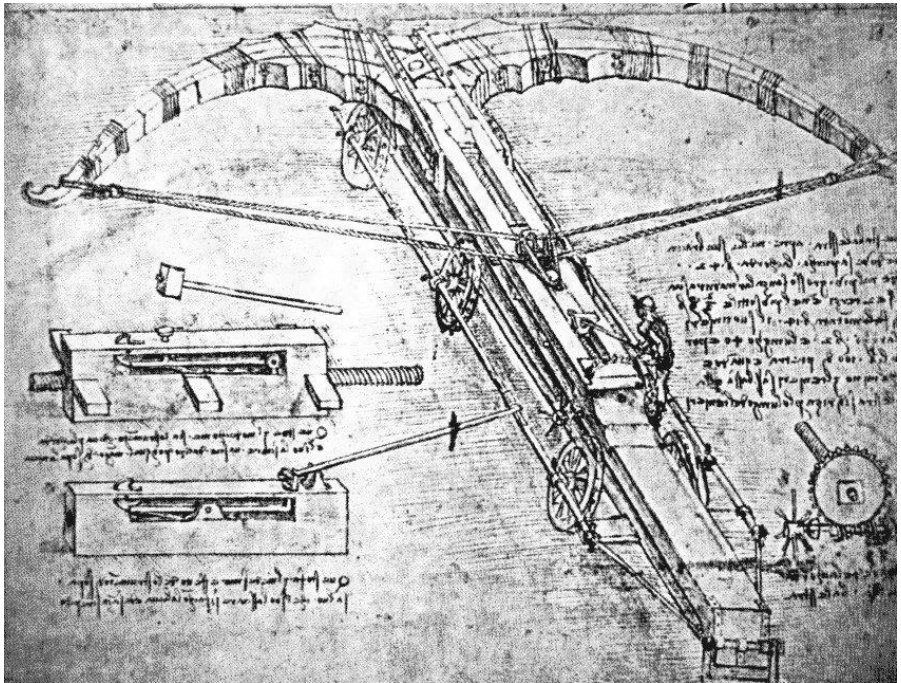




Intr-un sistem ierarhizat (adică unul în care ....), energia asupra sistemului se disipează la diferite niveluri în funcţie de specificul şi valoarea energiei implicate.

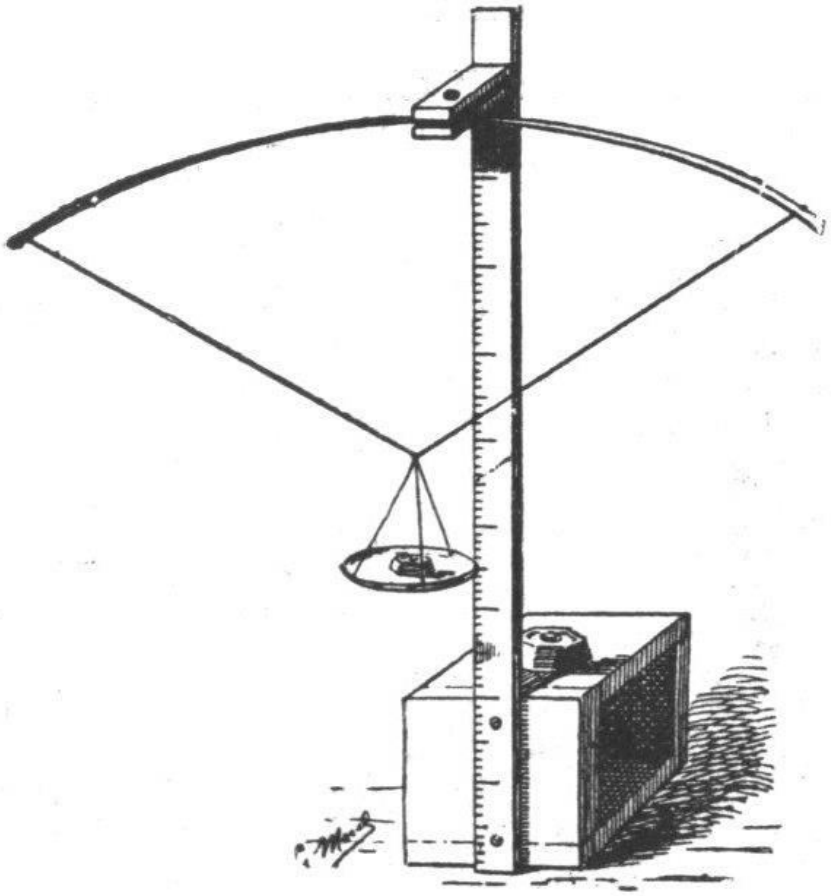
Aplicaţii la arce şi săgeţi







Experiment



Verificarea legii lui Hook

Este legea valabila?

Întrebări posibile

- 1. De ce exista mai multe tipuri de arcuri?
- 2. Ce avantaje sau dezavantaje au diferitele tipuri de arcuri?
- 3. Ce tipuri de arcuri s-au folosit pe teritoriul Romaniei (Dacii si după aceea)?
- 4. Exista o conexiune culturala cu tipul de arc utilizat de diferite popoare?
- 5. Se mai utilizează azi arcul cu săgeţi, in afara tirului sportiv?

Mulţumesc pentru răbdare!